Lunghezza infinita e area finita

Siano $l = 1$ la lunghezza del segmento di partenza e $n = 0, 1, 2, \dots$ il numero di iterazioni.

Sia L_n la lunghezza della curva all'n-esima iterazione, allora $L_0 = 1$, $L_1 = \frac{4}{3}$, $L_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$, … , $L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$, e si ha che

$$\lim_{n \to +\infty} L_n = +\infty.$$

La lunghezza di ciascun lato tende a 0, quando la costruzione si ripete all'infinito. Infatti le lunghezze dei lati costituiscono una progressione geometrica1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3^2}$, $\frac{1}{3^3}$, … , $\frac{1}{3^n}$, tale che $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3^n} = 0$.

La curva di Koch venne presentata dallo stesso Mandelbrot nell'opera *"Les Objets Fractals"* come modello sommario di una linea costiera, anche se, a differenza di quest'ultima, la curva è caratterizzata da un'irregolarità di tipo sistematico. Quindi tornando alla nostra domanda iniziale: quanto è lunga la costa della Gran Bretagna? Ebbene, la risposta dipende dal righello usato per la misurazione: dal punto di vista teorico, man mano che la lunghezza del righello tende a 0, la lunghezza della costa tende all'infinito. Questo fenomeno è noto come *"paradosso della linea costiera"*, introdotto da Mandelbrot in *"Quanto è lunga la costa della Gran Bretagna?" (1967)*. in cui descrive la curva di Koch è stata introdotta come modello sommario di una linea costiera. (Per approfondimenti a riguardo si può consultare il sito web http://en.wikipedia.org/wiki/How_Long_Is_the_Coast_of_Britain%3F_Statistical_Self-Similarity_and_Fractional_Dimension)

Ci si può chiedere quanto valga l'area sottesa dalla curva. Questa, alla prima iterazione è semplicemente l'area del triangolo equilatero che si trova al centro: $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{36}$. A tutte le altre successive iterazioni l'area si calcola facilmente sommando la nuova area aggiuntiva, ovvero la somma delle aree dei triangoli equilateri che si aggiungono ad ogni iterazione su ogni segmento della figura del passo precedente.

Sia A_n l'area aggiuntiva all'n-esima iterazione, allora $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{36}, A_2 = \frac{\sqrt{3}}{81}$, … , $A_n = \frac{\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{3}\right)^n$, allora si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{\sqrt{3}}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{16}\left(\frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{20}.$$